Capitolo 1
Numeri Complessi

1. L'insieme dei numeri complessi

Dalle nozioni di algebra elementare è nota l'esistenza *l'unità immaginaria* i definita dalla relazione $i^2 = -1$. Se consideriamo inoltre l'unità del *campo* dei numeri reali **R**: 1, per ogni coppia di numeri reali α, β, la combinazione lineare $z = \alpha + i\beta$ è, per definizione, un *numero complesso* e indicheremo con **C** la loro totalità. I numeri reali α e β prendono il nome, rispettivamente, di *parte reale* e *parte immaginaria* del numero complesso $z = \alpha + i\beta$. Se $\alpha = 0$, il numero complesso è detto *puramente immaginario*; se $\beta = 0$, si ha naturalmente un numero *reale*. Lo *zero* è il solo numero complesso che risulta simultaneamente reale e puramente immaginario. Inoltre, due numeri complessi sono uguali se, e soltanto se, hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria.

Nell'insieme dei numeri complessi **C** la definizione dell'addizione e della moltiplicazione discendono da quelle definite in **R**. Infatti, se $z = \alpha + i\beta$ e $w = \gamma + i\delta$ sono due numeri complessi, poniamo

$$z + w = (\alpha + i\beta) + (\gamma + i\delta) = (\alpha + \gamma) + i(\beta + \delta) \tag{1}$$

e

$$z \cdot w = (\alpha + i\beta) \cdot (\gamma + i\delta) = (\alpha\gamma - \beta\delta) + i(\alpha\delta + \beta\gamma) \tag{2}$$

Si osservi che, nell'identità 2), abbiamo fatto uso della relazione $i^2 = -1$. Meno evidente è l'esistenza della divisione di due numeri complessi. Mostreremo subito che

$$z/w = (\alpha + i\beta)/(\gamma + i\delta)$$

è un numero complesso se $w \neq 0$. Supponiamo che il quoziente esista, e sia $u = x + iy$. Allora, si avrà necessariamente

$$\alpha + i\beta = (\gamma + i\delta)(x + iy)$$

Per la 2) la relazione precedente può essere scritta nella forma

$$\alpha + i\beta = (\gamma x - \delta y) + i(\delta x + \gamma y)$$

Ne segue, per l'identità di due numeri complessi, che

$$\alpha = \gamma x - \delta y$$
$$\beta = \delta x + \gamma y$$

ossia, un sistema lineare di due equazioni in due incognite che ammette un'unica soluzione (ottenibile, ad esempio, procedendo per sostituzione)

$$x = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2}$$
$$y = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}$$

dal momento che $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$. In conclusione, abbiamo che

$$\frac{\alpha + i\beta}{\gamma + i\delta} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + i\frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} \tag{3)}$$

Dimostrata l'esistenza del quoziente di due numeri complessi, il suo valore numerico può essere calcolato in modo semplice. Se moltiplichiamo numeratore e denominatore del primo membro della 3) per $\gamma - i\delta$, otteniamo infatti

$$\frac{\alpha + i\beta}{\gamma + i\delta} = \frac{(\alpha + i\beta)(\gamma - i\delta)}{(\gamma + i\delta)(\gamma - i\delta)} = \frac{(\alpha\gamma + \beta\delta) + i(\beta\gamma - \alpha\delta)}{\gamma^2 + \delta^2}$$

In particolare, l'inverso di un numero complesso $z = \alpha + i\beta$ non nullo è

$$\frac{1}{\alpha + i\beta} = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Osserviamo, infine, che l'n-sima potenza dell'unità immaginaria, i^n, ammette solo quattro valori: 1, i, -1, $-i$, i quali corrispondono ai valori di n che, divisi per quattro, hanno come resto rispettivamente $0, 1, 2, 3$.

2. Considerazioni algebriche

Il modo in cui abbiamo presentato i numeri complessi è stato piuttosto artificiale. Storicamente furono introdotti per risolvere equazioni algebriche che, palesemente, non ammettono soluzione nell'ambito dei numeri reali. Ad esempio, l'equazione $x^2 + 1 = 0$, oppure $x^2 + x + 1 = 0$. Si trattava quindi di trovare un insieme numerico più ampio dei numeri reali che assicurasse l'esistenza di soluzioni per ogni equazione algebrica[1]. Senza

[1] Di fatto, il Teorema Fondamentale dell'Algebra assicura che ogni equazione algebrica a coefficienti reali ammette soluzione nel campo dei numeri complessi.

presentare l'evoluzione di questo processo storico, continuiamo col ricordare le proprietà dell'insieme dei numeri reali $\mathbf{R}$.

In primo luogo, $\mathbf{R}$ è un *campo*. Ciò significa che in $\mathbf{R}$ sono definite due operazioni, addizione e moltiplicazione, che soddisfano le proprietà di

commutatività: $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$, per ogni $a, b \in \mathbf{R}$;
associatività: $a + (b + c) = (a + b) + c$; $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, per ogni $a, b, c \in \mathbf{R}$;
distributività: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, per ogni a, b, c in $\mathbf{R}$.

I numeri 0 e 1 sono elementi neutri rispetto all'addizione e alla moltiplicazione nel senso che, $\alpha + 0 = \alpha$, $\alpha \cdot 1 = \alpha$ per ogni α in $\mathbf{R}$. Inoltre, ogni numero reale α ammette un opposto $-\alpha$ (0 è l'opposto di se stesso), ossia $\alpha - \alpha = 0$; mentre ogni numero reale β non nullo ammette un inverso $1/\beta$, ossia $\beta \cdot 1/\beta = 1$.[2]

Inoltre, il campo $\mathbf{R}$ ammette una *relazione d'ordine*: $\alpha < \beta$ o $\beta > \alpha$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, con $\alpha \neq \beta$, la quale si definisce facilmente in termini dell'insieme $\mathbf{R}_+$ dei numeri reali positivi: $\alpha < \beta$ se, e soltanto se, $\beta - \alpha \in \mathbf{R}_+$. Ora, l'insieme $\mathbf{R}_+$ è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

i) 0 non è un numero positivo;
ii) se $\alpha \neq 0$, allora α o $-\alpha$ è positivo;
iii) la somma e il prodotto di due numeri positivi è positivo.

Dalle tre proprietà precedenti discende che, per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$, α^2 è positivo o nullo; pertanto, $1 = 1^2$ è positivo; e, in forza della relazione d'ordine, i numeri 1, $1 + 1$, $1 + 1 + 1, \ldots$ sono tutti distinti. Ne segue che $\mathbf{R}$ contiene l'insieme dei numeri naturali $\mathbf{N}$ e, di conseguenza, i numeri relativi $\mathbf{Z}$. Dal momento che è un campo, contiene anche il sottocampo dei numeri razionali $\mathbf{Q}$. Si osservi che $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. Da notare, inoltre, che la relazione d'ordine è sovente indicata con $\leq$; per cui, se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$, allora $\alpha = \beta$. Le considerazioni precedenti continuano a valere, con le naturali modifiche, prendendo in considerazione l'insieme $\mathbf{R}_+ \cup \{0\}$.

Infine, il campo dei numeri reali verifica la *condizione di completezza*: se A e B sono due sottoinsiemi non vuoti di numeri rali tali che $\alpha \leq \beta$ comunque si scelgano α in A e β in B, allora esiste un numero reale γ tale che $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ qualunque siano α e β. Ciò discende dal fatto che, per ipotesi, A ammette un *estremo superiore finito*, diciamo ϵ_i, e B un *estremo inferiore* finito, diciamo ϵ_s, con $\epsilon_s \leq \epsilon_i$. Da qui la conclusione.

[2] Sebbene la struttura di campo sia corretta, non dice molto dal momento che le proprietà elencate sono ben note per i numeri reali, per i numeri razionali; e, per quanto visto nel paragrafo precedente, anche per i numeri complessi. Il concetto acquista la sua importanza nel contesto più ampio dell'Algebra in cui altri insiemi, non necessariamente numerici, hanno questa struttura. Ad esempio, l'insieme dei quozienti di due polinomi a coefficienti reali o complessi in una o più variabili.

Tutta la discussione precedente presuppone il fatto che si conosca chi sia l'insieme **R** ma, di fatto, così non è. Abbiamo osservato che tale insieme, che supponiamo per il momento ben definito, contiene i numeri razionali. Sappiamo, inoltre, che esistono numeri che non sono razionali: gli esempi storici sono rappresentati dalla lunghezza della diagonale d di un quadrato di lato 1 ($d = \sqrt{2}$), e dal rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro (π). Ma quanti altri numeri reali esistono? La risposta è fornita dal seguente risultato: esiste ed unico (a meno di isomorfismi di campi[3]) un insieme **R** che soddisfa tutte le proprietà descritte in precedenza: assiomi di un campo, ordinamento e condizione di completezza. Va da sé che ometteremo la dimostrazione di tale risultato. Invece, possiamo dare una descrizione di **R**. È ben noto che ogni numero razionale si può rappresentare come *numero decimale finito* o *periodico*. L'insieme dei numeri reali si ottiene aggiungendo a questi i *numeri decimali infiniti non periodici.*

Possiamo ora ritornare al problema presentato all'inizio del paragrafo: quello della ricerca delle soluzioni delle equazioni algebriche. Supponiamo che esista un campo **F** che contenga **R** nel quale l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ammetta soluzione, e sia i. Allora, $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$. Ne segue che l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ammette esattamente due soluzioni in **F**: i e $-i$. Sia **C** il sottoinsieme di **F** costituito dagli elementi del tipo $\alpha + i\beta$, con α e β in **R**. Gli elementi di **C** sono univocamente determinati nel senso che, se $\alpha + i\beta = \alpha' + i\beta'$, allora $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$. Infatti, dall'uguaglianza deriva che $\alpha-\alpha' = -i(\beta-\beta')$ per cui $(\alpha-\alpha')^2 = -(\beta-\beta')^2$, e ciò è possibile solo se $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$. Come osservato nella nota 2, **C** è un campo ed è indipendente da **F**. Infatti, se $\mathbf{F}'$ è un altro campo contenente **R** con i' soluzione dell'equazione $x^2 + 1 = 0$, il corrispondente insieme $\mathbf{C}'$ è costituito dagli elementi del tipo $\alpha + i'\beta$. Allora, l'applicazione di **C** in $\mathbf{C}'$ che, ad $\alpha + i\beta$, associa $\alpha + i'\beta$ è un isomorfismo di **C** con $\mathbf{C}'$ (si veda la nota 3). In conclusione, abbiamo costruito, a meno di isomorfismi, il *campo dei numeri complessi.* Come osservato nella nota 1, il Teorema Fondamentale dell'Algebra assicura che ogni equazione algebrica a coefficienti reali ammette soluzione.

Resta da chiarire un ultimo punto: l'esistenza di un campo **F** contenente **R** tale che l'equazione $x^2+1 = 0$ ammetta soluzione. Al riguardo, consideriamo tutte le espressioni del tipo $\alpha+i\beta$, con α e β reali, in cui $+$ ed i sono dei simboli ($+$ non indica l'addizione e i non è un elemento di **R**). Sia **F** l'insieme di tali espressioni. La 1) e la 2) del paragrafo precedente permettono di introdurre un'addizione e una moltiplicazione in **F** (si osservi il diverso significato del segno $+$), da cui segue che **F** è un campo. Gli elementi del tipo $\alpha + i0$ costituiscono un sottocampo di **F** chiaramente isomorfo ad **R**. Inoltre, l'elemento

[3] Un isomorfismo tra due campi è un'applicazione biunivoca che preserva la somma e il prodotto.

$0+i1$ è soluzione dell'equazione $x^2+1=0$ in quanto $(0+i1)^2=-(1+i0)$. Di fatto, il campo $\mathbf{F}$ è identico a $\mathbf{C}$ dal momento che

$$\alpha+i\beta=(\alpha+i0)+\beta(0+i1)$$

Si noti che il primo membro è un elemento di $\mathbf{C}$, il secondo un elemento di $\mathbf{F}$; inoltre, il segno + nelle espressioni tra parentesi è un simbolo, l'altro indica l'addizione.

3. Coniugio e valore assoluto

L'applicazione di $\mathbf{C}$ in $\mathbf{C}$ che ad ogni numero complesso $z=\alpha+i\beta$ associa il numero complesso $\alpha-i\beta$ è detta *coniugio*, e il numero complesso $\alpha-i\beta$ *coniugato* di z, in simboli $\bar{z}=\alpha-i\beta$. Dalla definizione segue che un numero è reale se, e soltanto se, coincide con il suo coniugato; inoltre, il coniugio è un'applicazione *involutoria* nel senso che $\bar{\bar{z}}=z$. Le formule

$$\Re\mathrm{e}\, z=\frac{z+\bar{z}}{2} \qquad \Im\mathrm{m}\, z=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

esprimono la parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso per mezzo del suo coniugato. Le proprietà fondamentali del coniugio sono le seguenti

$$\overline{z+w}=\bar{z}+\overline{w}$$
$$\overline{zw}=\bar{z}\overline{w}$$

La corrispondente proprietà per il quoziente è una conseguenza delle precedenti: se $wu=z$, allora $\overline{w}\bar{u}=\bar{z}$. Pertanto, $\overline{(z/w)}=\bar{z}/\overline{w}$. Come applicazione, consideriamo l'equazione a coefficienti complessi

$$c_nz^n+c_{n-1}z^{n-1}+\ldots+c_1z+c_0=0$$

Se ζ è una soluzione, allora $\bar{\zeta}$ è soluzione dell'equazione

$$\bar{c}_nz^n+\bar{c}_{n-1}z^{n-1}+\ldots+\bar{c}_1z+\bar{c}_0=0$$

In particolare, se i coefficienti sono reali, ζ e $\bar{\zeta}$ sono soluzioni della stessa equazione. Abbiamo così il noto risultato che le soluzioni non reali di un'equazione a coefficienti reali sono a due a due coniugate.

Il prodotto $z\bar{z}=\alpha^2+\beta^2$ è un numero reale non negativo. La sua radice quadrata è detta *modulo* o *valore assoluto* del numero complesso z, in simboli $|z|$. La terminologia e la notazione sono giustificate dal fatto che il modulo di un numero reale coincide con il suo valore numerico preso col segno positivo.

Dal fatto che $z\bar{z} = |z|^2$ segue che $|\bar{z}| = |z|$; e, per quanto riguarda il prodotto di due numeri complessi, abbiamo

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = az\bar{z}\overline{w} = z\bar{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2$$

da cui

$$|zw| = |z||w|$$

poiché ambo i membri della prima uguaglianza sono non negativi. È chiaro che tale proprietà si estende al prodotto di un numero finito di numeri complessi

$$|z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1||z_2| \cdots |z_n|$$

Per quanto riguarda il quoziente z/w, con $w \neq 0$, si ha $w(z/w) = z$; e, di conseguenza, $|w||z/w| = |z|$. Quindi,

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

La formula del valore assoluto della somma di due numeri complessi non è altrettanto semplice. Abbiamo infatti

$$|z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \overline{w}) = z\bar{z} + (z\overline{w} + w\bar{z}) + w\overline{w}$$

equivalentemente

4) $$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\Re\mathrm{e}\, z\overline{w}$$

La formula corrispondente per la differenza è

4') $$|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\Re\mathrm{e}\, z\overline{w}$$

per cui, sommando le due uguaglianze, otteniamo

5) $$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

4. Disuguaglianze

A differenza dei numeri reali, il campo dei numeri complessi non ha una relazione d'ordine. Pertanto, tutte le disuguaglianze si riferiscono a numeri reali. Dalla definizione di valore assoluto deduciamo le disuguaglianze

$$6)\qquad \begin{array}{r} -|z| \le \Re\mathrm{e}\, z \le |z| \\ -|z| \le \Im\mathrm{m}\, z \le |z| \end{array} \iff \begin{array}{l} |\Re\mathrm{e}\, z| \le |z| \\ |\Im\mathrm{m}\, z| \le |z| \end{array}$$

L'uguaglianza $\Re\mathrm{e}\, z = |z|$ si ha se, e soltanto se, z è reale e non negativo. Se alla 4) applichiamo la 6), otteniamo

$$|z+w|^2 \le (|z|+|w|)^2$$

da cui

$$7)\qquad |z+w| \le |z|+|w|$$

Infatti, posto $z\overline{w}$ nella prima disuguaglianza della 6), si ha che $|\Re\mathrm{e}\, z\overline{w}| \le |z\overline{w}|$. Ne segue che

$$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\Re\mathrm{e}\, z\overline{w} \le |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| = (|z|+|w|)^2$$

in quanto $|z\overline{w}| = |zw|$. Si tratta della *disuguaglianza triangolare*; e, per induzione, può essere estesa ad una somma finita di numeri complessi

$$8)\qquad |z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$$

Le disuguaglianze 7) e 8) sono di fondamentale importanza nel caso dei numeri reali e non meno in quello dei numeri complessi. L'uguaglianza nella 7) sussiste se, e soltanto se, $z\overline{w} \ge 0$. Infatti, in tal caso $\Re\mathrm{e}\, z\overline{w} = z\overline{w} = |z\overline{w}|$. Se $w \ne 0$, la condizione può essere scritta nella forma $|w|^2(z/w) \ge 0$ la quale è equivalente a $z/w \ge 0$. Per quanto riguarda la 8), supponiamo che valga l'uguaglianza; e, inoltre, siano tutti non nulli. Allora,

$$\begin{aligned} |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| &= |(z_1 + z_2) + z_3 + \ldots + z_n| \\ &\le |z_1 + z_2| + |z_3 + \ldots + z_n| \\ &\le |z_1| + |z_2| + |z_3| + \ldots + |z_n| \end{aligned}$$

Ne segue che $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$, per cui $z_1/z_2 \ge 0$. Dal momento che l'ordinamento degli n numeri complessi è arbitrario, risulta che il *rapporto di due qualsiasi addendi è un numero reale positivo.* Viceversa, supponiamo che quest'ultima condizione sia soddisfatta. Allora,

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 + z_3 \ldots + z_n| &= |z_1|\left|1 + \frac{z_2}{z_1} + \cdots + \frac{z_n}{z_1}\right| \\ &= |z_1|\left(1 + \frac{z_2}{z_1} + \ldots + \frac{z_n}{z_1}\right) \\ &= |z_1|\left(1 + |\frac{z_2}{z_1}| + \cdots + |\frac{z_n}{z_1}|\right) \\ &= |z_1| + |z_2 + \cdots + |z_n| \end{aligned}$$

In conclusione, *il segno di uguaglianza nella* 8) *sussiste se, e soltanto se, il rapporto di due qualsiasi numeri complessi è un numero reale positivo.*

Tornando alla 7), possiamo ottenere un'altra interessante disuguaglianza:

$$|z| = |(z - w) + w| \leq |z - w| + |w|$$

da cui

$$|z| - |w| \leq |z - w|$$

Per la stessa ragione, $|w| - |z| \leq |z - w|$; e, dalla combinazione delle due disuguaglianze, abbiamo

9) $$|z - w| \geq \big||z| - |w|\big|$$

Un caso particolare della 7) è la disuguaglianza

10) $$|\alpha + i\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

la quale esprime che il valore assoluto di un numero complesso è, al più, uguale alla somma dei valori assoluti delle parti reale e immaginaria.

Molte altre disuguaglianze, le cui dimostrazioni non sono immediate, sono di uso frequente; tra queste, la più significativa è la *disuguaglianza di Cauchy*:

11) $$\Big|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\Big| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2$$

Per quanto riguarda la sua dimostrazione, sia λ un qualsiasi numero complesso. Così, dalla 7) otteniamo

12) $$\sum_{k=1}^{n} |z_k - \lambda \overline{w}_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + |\lambda|^2 \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 - 2\Re\mathrm{e}\, \bar{\lambda} \sum_{k=1}^{n} z_k w_k \geq 0$$

per ogni λ. Scegliamo

13) $$\lambda = \sum_{k=1}^{n} z_k w_k \Big/ \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2$$

e si osservi che, se il denominatore fosse nullo, non ci sarebbe nulla da dimostrare. La scelta di λ non è arbitraria, ma dettata dal fatto di rendere l'espressione 12) più piccola possibile. Sostituendo la 13) nella 12), dopo le ovvie semplificazioni, otteniamo

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 - \Big|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\Big|^2 \Big/ \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 \geq 0$$

da cui la 11). Dalla 12) deduciamo inoltre che il segno nella 11) sussiste se, e soltanto se, gli z_k sono proporzionali ai w_k.

5. Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

Consideriamo il piano cartesiano $\mathbf{E}^2$, allora un numero complesso $z = \alpha + i\beta$ può essere rappresentato da un punto di coordinate (α, β). Tale rappresentazione è usata comunemente, per cui si parla del *punto* z di coordinate (α, β) come sinonimo del numero complesso z. L'asse della prima coordinata (asse x) prende il nome di *asse reale*, mentre la seconda coordinata (asse y) è detto *asse immaginario*. Il piano stesso è chiamato *piano complesso*.

La rappresentazione geometrica dei numeri complessi ha la sua utilità in quanto permette di utilizzare il linguaggio geometrico per descrivere le proprietà dei numeri complessi. Comunque, è da tener presente che i risultati che si raggiungono debbono ottenersi dalle proprietà dei numeri reali e non dal linguaggio geometrico.

5.1 Addizione e moltiplicazione geometriche

L'addizione di due numeri complessi può essere visualizzata come *addizione vettoriale*. A tale scopo, rappresentiamo un numero complesso z non solo come punto del piano complesso, bensì come vettore con origine nel punto di coordinate $(0, 0)$ ed estremo in z. In ogni caso, il numero complesso, il punto nel piano complesso e il vettore saranno indicati sempre con la stessa lettera z. Sia $w = \gamma + i\delta$ un altro vettore. Allora $z + w$ è un vettore di *componenti* $(\alpha + \gamma, \beta + \delta)$. La differenza $z - w$, analogamente, è il vettore di componenti $(\alpha - \gamma, \beta - \delta)$. Si osservi che $z + w$ e $z - w$ non sono altro che le diagonali del parallelogramma i cui lati sono z e w.

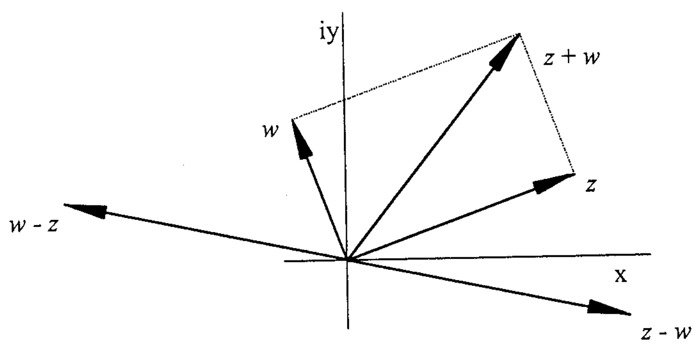

Figura 1

Un vantaggio della rappresentazione geometrica risiede nel fatto che la lunghezza del vettore z è $|z|$. Di conseguenza, la distanza tra z e w è $|z-w|$. In forza di questa interpretazione della distanza, la disuguaglianza triangolare $|z+w| \leq |z|+|w|$ e l'identità $|z+w|^2+|z-w|^2 = 2\left(|z|^2+|w|^2\right)$ diventano teoremi familiari di geometria.

Se z è un numero complesso, il suo coniugato $\bar{z}$ è *simmetrico* rispetto all'asse reale. La simmetria rispetto all'asse immaginario individua $-\bar{z}$. Così, i quattro numeri complessi z, $-\bar{z}$, $-z$, $\bar{z}$ sono i vertici di un rettangolo che è simmetrico rispetto ad entrambi gli assi.

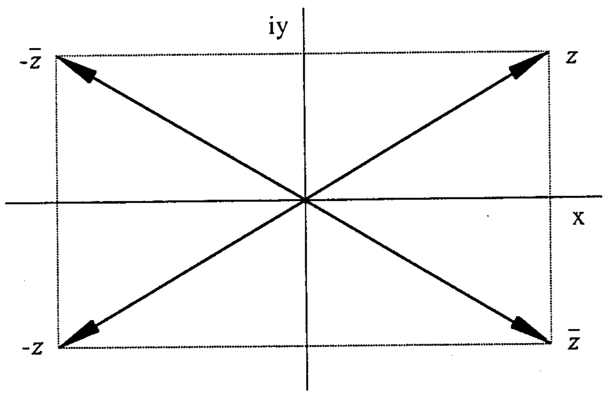

Figura 2

Allo scopo di fornire l'interpretazione geometrica della moltiplicazione di due numeri complessi, introduciamo le coordinate polari. Se le coordinate polari di un punto di coordinate (α,β) sono (ρ,φ), allora

$$\begin{cases} \alpha = \rho\cos\varphi \\ \beta = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}$$

Pertanto, possiamo scrivere $z = \alpha + i\beta = \rho(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$. La forma trigonometrica di un numero complesso implica che $\rho = |z|$. L'angolo polare φ è detto *anomalia* o *argomento* del numero complesso, in simboli $\arg z$.

Consideriamo due numeri complessi $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\,\mathrm{sen}\,\varphi_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\,\mathrm{sen}\,\varphi_2)$. Allora,

$$14)\qquad \begin{aligned} z_1z_2 &= \rho_1\rho_2\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \mathrm{sen}\,\varphi_1\,\mathrm{sen}\,\varphi_2) + i(\mathrm{sen}\,\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\,\mathrm{sen}\varphi_2)\right] \\ &= \rho_1\rho_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\,\mathrm{sen}\,(\varphi_1+\varphi_2)\right] \end{aligned}$$

Ne segue che il prodotto di due numeri complessi ha modulo $\rho_1\rho_2$ e argomento $\varphi_1+\varphi_2$. Pertanto,

$$15)\qquad \arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

In modo analogo si ottiene la

$$\text{16)} \qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

È evidente che la 15) può essere estesa al prodotto di un numero finito di numeri complessi; e, le formule che abbiamo dedotto forniscono una profonda e inattesa proprietà della rappresentazione geometrica dei numeri complessi. Comunque, il modo in cui sono state ottenute è di natura trigonometrica; ossia, indipendente dalle proprietà dei numeri complessi. D'altro canto, esiste una connessione tra la funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche la cui dimostrazione va al di là dei nostri scopi. In ogni caso, è utile riportare la *formula di Eulero*; ossia,

$$e^z = e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha e^{i\beta} = e^\alpha(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta)$$

Si noti, in particolare, che $e^{i2\pi n} = 1$ per ogni $n \in \mathbf{Z}$. Concludiamo osservando che l'argomento dello 0 non è difinito; così, la 15) ha senso soltanto se z_1 e z_2 sono non nulli. Inoltre, l'argomento φ è individuato a meno di multipli interi di 2π.

5.2. L'equazione binomiale

Dai risultati precedenti deduciamo che la potenza n-sima, $n > 0$, di $z = \rho(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$ è data dalla formula

$$\text{17)} \qquad z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\,\mathrm{sen}\,n\varphi)$$

Se $n = 0$, la 17) è banalmente vera; e, poiché

$$z^{-1} = \rho^{-1}(\cos\varphi - i\,\mathrm{sen}\,\varphi) = \rho^{-1}\left[(\cos(-\varphi) + i\,\mathrm{sen}\,(-\varphi))\right]$$

essa rimane valida per ogni $n \in \mathbf{Z}$. Per $n = 1$, abbiamo la *formula di de Moivre*

$$(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)^n = \cos n\varphi + i\,\mathrm{sen}\,n\varphi$$

che fornisce un modo molto semplice per esprimere $\cos n\varphi$ e $\mathrm{sen}\,n\varphi$ in funzione di $\cos\varphi$ e $\mathrm{sen}\,\varphi$.

Per ricavare la radice n-sima di un numero complesso z dobbiamo risolvere l'equazione

$$\text{18)} \qquad w^n = z$$

Per ricavare la radice n-sima di un numero complesso z dobbiamo risolvere l'equazione

$$w^n = z \tag{18}$$

Supponendo $z \neq 0$, poniamo $z = \rho(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\varphi)$ e $w = r(\cos\psi + i\,\mathrm{sen}\psi)$. Allora, la 18) prende la forma

$$r^n(\cos n\psi + i\,\mathrm{sen}\,n\psi) = \rho(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi) \tag{19}$$

Tale equazione è certamente soddisfatta se $r^n = \rho$ e $n\psi = \varphi$. Pertanto,

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{n}\right) \tag{20}$$

ove $\sqrt[n]{\rho}$ denota la radice $n-$sima *positiva* di $\rho > 0$. Ma la 20) non è esprime l'unica soluzione. Infatti, la 19) è soddisfatta se $n\psi$ differisce da φ per un multiplo di 2π. Pertanto, la 20) è verificata se, e soltanto se,

$$\psi = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}$$

ove k è un intero. Di fatto, i soli valori $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ forniscono differenti valori di w. Pertanto, tutte le soluzione dell'equazione 18) sono date da

$$w = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right] \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

In conclusione, ogni numero complesso non nullo ammette esattamente n radici. Esse hanno lo stesso modulo e gli argomenti sono ugualmente distanziati. Geometricamente, le n radici sono i vertici di un poligono regolare di n lati di centro l'origine. Il caso $z = 1$ è particolarmente importante. Le radici dell'equazione $w^n = 1$ sono dette radici n-sime dell'unità; e, se poniamo

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n}$$

allora tutte le radici sono $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$. È allora evidente che, se $\sqrt[n]{z}$ è una qualsiasi radice $n-$sima di z, tutte le n radici sono del tipo $\omega^k\sqrt[n]{z}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.