Capitolo 2

Matrici, determinanti, sistemi lineari

1. Definizioni e proprietà delle matrici

D'ora in avanti indicheremo con $\mathbf{K}$ il campo dei numeri reali ($\mathbf{R}$) oppure quello dei numeri complessi ($\mathbf{C}$).

Siano m ed n due interi positivi e $I_{m,n}$ l'insieme delle coppie ordinate di interi (i, j) tali che $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Un'applicazione $A : I_{m,n} \longrightarrow \mathbf{K}$ si dice *matrice* $m \times n$ e indicheremo con a_{ij} il valore che l'applicazione A assume nell'elemento (i, j) di $I_{m,n}$. Chiaramente, una matrice A, in quanto applicazione definita su un insieme finito di elementi, è assegnata non appena se ne conoscano i valori che questa assume in $\mathbf{K}$. Pertanto, una matrice A non è altro che una tabella rettangolare di elementi di $\mathbf{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

disposti secondo m *righe* ed n *colonne*. Il numero a_{ij} prende il nome di *elemento della matrice A di posto ij*; ossia, appartente alla i-esima riga e alla j-esima colonna, ed i si dice *indice di riga* e j *indice di colonna*. Pertanto, in forma abbreviata, potremo indicare una matrice A nel modo seguente: $A = (a_{ij})$, con $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. Comunque, per non appesantire le notazioni, ometteremo la variabilità degli indici i e j.

Se $m = n$, la matrice $A = (a_{ij})$ si dice *quadrata* ed n il suo *ordine*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Una matrice $1 \times n$ prende il nome di *matrice riga*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

mentre una matrice $m \times 1$ la chiameremo *matrice colonna*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Indichiamo con $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$ l'insieme delle matrici $m \times n$. Allora, tenendo conto del fatto che in $\mathbf{K}$ è definita una somma, possiamo analogamente definire un'operazione di somma in $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$ tra due matrici $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ ponendo

1) $$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

ovvero, $A + B$ è la matrice che al posto ij ha l'elemento $a_{ij} + b_{ij} \in \mathbf{K}$. Si osservi che $A + B = B + A$. In altri termini, la somma in $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$ gode della *proprietà commutativa*. Nell'insieme delle matrci $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$ esiste la matrice *nulla*; ossia, la matrice

2) $$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

i cui elementi sono tutti zero, la quale è l'*elemento neutro* rispetto alla somma. Ossia,

3) $$A + O = O + A = A$$

È evidente che la matrice O è l'unico elemento di $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$ che verifica la 2). Inoltre, se $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$, definiamo l'*opposta* di A, che indicheremo con $-A$, la matrice $-A = (-a_{ij})$, per cui

4) $$A + (-A) = O$$

Dal momento che $\mathbf{K}$ gode della *proprietà associativa* rispetto alla somma, essa vale anche in $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$:

5) $$(A + B) + C = A + (C + C)$$

per ogni $A, B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$.

Nel campo $\mathbf{K}$ esiste anche un prodotto, ne segue che possiamo definire un'operazione di moltiplicazione di una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$ per uno scalare $k \in \mathbf{K}$. Precisamente,

6) $$kA = (k\, a_{ij})$$

Come per la 1), è chiaro il significato della 6). È da notare che un'operazione di moltiplicazione non è definita in $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$, bensì tra gli elementi di $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$ e gli elementi di $\mathbf{K}$. In altri termini, essa è un'applicazione del prodotto cartesiano $\mathbf{K}\times\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$ in $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$:

$$\mathbf{K}\times\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})\longrightarrow\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$$

che, ad ogni coppia $(k,A)\in\mathbf{K}\times\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$, associa la matrice $kA\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$. Si osservi che $kA = Ak$; e $(-1)A = -A$. Inoltre, valgono le seguenti proprietà:

7) $$1A = A$$

per ogni $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$;

8) $$h(kA) = (hk)A$$

per ogni $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$ e per ogni $h,k\in\mathbf{K}$;

9) $$k(A+B) = kA + kB$$

per ogni $A,B\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$ e per ogni $k\in\mathbf{K}$;

10) $$(h+k)A = hA + kA$$

per ogni $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$ e per ogni $h,k\in\mathbf{K}$.

Infine, esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$ e $\mathbf{K}^{m+n}$ definito nel modo seguente: alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

associamo l'elemento di $\mathbf{K}^{m\times n}$

$$(a_{11},a_{12},\dots,a_{1n};a_{21},a_{22},\dots,a_{2n};\dots,a_{m1},a_{m2},\dots,a_{mn})$$

Sebbene, come già accennato, non sia possibile definire una moltiplicazione in $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$ con m ed n arbitrari, non di meno possiamo introdurre una moltiplicazione tra matrici di *tipo diverso*. Precisamente, consideriamo due matrici $A = (a_{ih})\in\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbf{K})$ e $B = (b_{hj})\in\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbf{K})$. Dal momento che ogni riga della matrice A è costituita da p elementi, così come ogni colonna della matrice B, definiamo il prodotto di A per B, in simboli AB, la matrice $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ i cui elementi c_{ij} sono dati dalla formula

11) $$c_{ij} = \sum_{h=1}^{p} a_{ih} b_{hj}$$

Diremo allora che la matrice C è ottenuta come *prodotto righe per colonne* delle matrici A e B. Giustificheremo tale definizione nel prossimo capitolo. Ad esempio, se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

Va da sé che il prodotto righe per colonne è un'applicazione di $\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbf{K})$ in $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$. Così, se $m = n$, tale prodotto è definito in $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{K})$ nel senso che, per ogni coppia di matrici $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{K})$, la matrice AB appartiene a $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{K})$. Quindi, l'insieme delle matrici quadrate, oltre alla somma di matrici e al prodotto di una matrice per uno scalare, ha anche un'operazione di prodotto tra matrici.

In primo luogo osserviamo che, in $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{K})$, il prodotto righe per colonne non è *commutativo*; ossia, in generale, $AB \neq BA$. Infatti, consideriamo le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

di $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbf{K})$. Allora abbiamo

$$AB = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

Comunque, il prodotto righe per colonne in $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{K})$ gode delle seguenti proprietà: se $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{K})$, risulta

a) $A(BC) = (AB)C$ *proprietà associativa*
b) $(A + B)C = AC + BC$ *proprietà distributiva destra*
c) $C(A + B) = CA + CB$ *proprietà distributiva sinistra*

La dimostrazione di a), b) e c) segue dalle definizioni di somma e di prodotto righe per colonne tra matrici. Inoltre, in $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{K})$ esiste l'*elemento neutro* rispetto al prodotto righe per colonne rappresentato dalla matrice

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})$$

ove δ_{ij} è il simbolo di Kronecker definito dalla relazione

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Ossia, $AI = IA = A$ per ogni $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{K})$.

Sebbene le proprietà precedenti non rendano ragione del perché della definizione di prodotto righe per colonne tra matrici, tuttavia, nel caso delle matrici quadrate, mostrano che ha una suo senso. Tutto ciò mette in evidenza, e lo vedremo meglio nel §2, il ruolo centrale che le matrici quadrate rivestono nel contesto più ampio delle matrici $m \times n$. Pertanto, presenteremo una prima serie di proprietà e definizioni relative alle matrici quadrate. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

una matrice quadrata. Allora,

i) Gli elementi a_{ii}, $i = 1, 2, \dots, n$ costituiscono la *diagonale pricipale* di A, mentre gli elementi $a_{i(n-i+1)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, la *diagonale secondaria.*

ii) Se $A = (a_{ij})$, la matrice che si ottiene scambiando le righe con le colonne si dice *trasposta* di A, in simboli ${}^tA = (a_{ji})$. Se A e B sono due matrici, vale la relazione ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

iii) Una matrice A si dice *simmetrica* se ${}^tA = A$, *antisimmetrica* se ${}^tA = -A = (-a_{ij})$. Se A è antisimmetrica, la diagonale principale è nulla.

2. Determinante di una matrice quadrata

Consideriamo l'insieme $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Una *permutazione* di I_n è un'applicazione *biunivoca* σ di I_n in sé. Quindi, data σ, resta individuato l'insieme

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}$$

che corrisponde ad una diversa disposizione dei numeri $1, 2, \dots, n$ ad eccezione del caso in cui σ sia l'identità in quanto $\sigma(i) = i$ per ogni i. Così, chiameremo $\{1, 2, \dots, n\}$ la *permutazione fondamentale*. L'insieme di tutte le permutazioni si indica con $\mathcal{S}_n$ ed è costituito da $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ elementi. Ciò si dimostra – ad esempio – per induzione su n. Se $n = 1$, chiaramente $\mathcal{S}_1$ è costituito da una sola permutazione. Supponiamo, per ipotesi induttiva, che $\mathcal{S}_{n-1}$ abbia $(n-1)!$ permutazioni. Definiamo l'applicazione $\pi : \mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{S}_{n-1}$ che, ad ogni permutazione $\big\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\big\}$ di $\mathcal{S}_n$, associa l'elemento di $\mathcal{S}_{n-1}$ che si ottiene da $\big\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\big\}$ eliminando il numero n. È evidente che π è suriettiva. Inoltre, la controimmagine di un elemento di $\mathcal{S}_{n-1}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{S}_n$ costituito da n permutazioni. Infatti, se $\big\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n-1)\big\} \in \mathcal{S}_{n-1}$,

$$\pi^{-1}\Big(\big\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n-1)\big\}\Big) =$$

$$\Big\{\big(n, \sigma(1), \dots, \sigma(n-1)\big), \big(\sigma(1), n, \dots, \sigma(n-1)\big), \dots, \big(\sigma(1), \sigma(2), \dots, n\big)\Big\}$$

Dal momento che le permutazioni di $\mathcal{S}_{n-1}$ sono $(n-1)!$, quelle di $\mathcal{S}_n$ saranno $n \cdot (n-1)! = n!$

Una permutazione $\sigma \in \mathcal{S}_n$ si dice *pari* se è riconducibile alla permutazione fondamentale $\{1, 2, \dots, n\}$ con un numero pari di scambi tra gli elementi che la compongono, in caso contario si dirà *dispari*. Non dimostreremo il fatto che la parità o meno di una permutazione non dipende dal modo in cui questa è riconducibile alla permutazione fondamentale. Tale risultato, però, implica che l'essere pari o dispari è una proprietà intrinseca della permutazione. Analogamente si dimostra che le permutazioni pari sono tante quante le permutazioni dispari; ossia, $n!/2$. Si osservi che $n!$ è un numero pari se $n \geq 2$.

Ciò premesso, sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}$ e consideriamo il prodotto di n elementi della matrice presi in righe e colonne differenti. Poiché il prodotto è commutativo, è possibile ordinare gli n fattori in modo tale che l'*indice di riga* sia la permutazione fondamentale $\{1, 2, \dots, n\}$. Questo è possibile in quanto gli n elementi appartengono a righe differenti. Ne segue che l'*indice di colonna* sarà una permutazione σ di $\mathcal{S}_n$ perché gli n elementi appartengono a colonne differenti. Quindi, un prodotto di cui sopra sarà del tipo:

$$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Va da sé che avremmo potuto ordinare gli n elementi secondo l'indice di colonna. Ora, consideriamo *tutti* i possibili prodotti di n elementi di A presi in righe e colonne differenti ordinando i fattori di ciascun prodotto nel modo indicato, ovvero secondo l'indice di riga oppure secondo quello di colonna. Prenderemo il prodotto col proprio segno se la permutazione $(\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}$ è pari, col segno meno se è dispari. Se indichiamo con $\epsilon(\sigma)$ la funzione di $\mathcal{S}_n$ in $\{1, 2\}$ che assume il valore 1 se σ è dispari, 2 se σ è pari, ciascun prodotto si scriverà nel modo seguente

$$(-1)^{\epsilon(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Si osservi che il numero dei prodotti è allora $n!$ e, ordinandoli secondo l'indice di riga o quello di colonna, si ottengono sempre gli stessi $n!$ prodotti.

Definiamo *determinante* della matrice A, in simboli $\det A$ (oppure $|A|$)

$$|A| = \det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

e, chiaramente, $\det A \in \mathbf{K}$. Nel caso delle matrici 2×2 si ha

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Per le matrici 3×3 si ha

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Naturalmente, il calcolo del determinante per matrici di ordine $n \geq 4$ presenta maggiori difficoltà. Comunque, è possibile ottenere un risultato che consente di ridurre lo sviluppo del determinante di una matrice quadrata di ordine n a quello di determinanti di matrici di ordine $n-1$. Al riguardo, sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbf{K})$. Definiamo *complemento algebrico* dell'elemento a_{ij} di A la matrice quadrata che si ottiene eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna, in simboli A_{ij}.

Teorema 1. (di Laplace) *Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine $n \geq 2$. Allora, $\det A$ è la somma dei prodotti degli elementi di una riga (risp. colonna) per i determinanti dei rispettivi complementi algebrici presi con il segno $(-1)^{i+j}$. Si hanno quindi* *le formule dette, rispettivamente, sviluppo del determinante rispetto alla i-esima riga e alla j-esima colonna secondo la regola di Laplace:*

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{i+1} a_{i1} A_{i1} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} A_{in} \\ &= (-1)^{1+j} a_{1j} A_{1j} + \ldots + (-1)^{n+j} a_{nj} A_{nj}\end{aligned}$$

per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Ometteremo la dimostrazione di questo importante risultato che, pur non presentando alcuna difficoltà, richiede lunghi e tediosi calcoli. Occupiamoci invece di stabilire alcune proprietà del determinante di una matrice.

Proposizione 1. *Sia* $A = (a_{ij})$ *una matrice quadrata di ordine* n. *Allora,*

a) $\det A = \det {}^tA$, *ove* ${}^tA$ *è la trasposta di* A.
b) *Se* A *ha una riga o una colonna nulla,* $\det A = 0$.
c) *Se* B *è la matrice che si ottiene da* A *moltiplicando una riga per uno scalare* k, $\det B = k \det A$. *In generale, se* A *è moltiplicata per* k, *si ha* $\det A = k^n \det A$.
d) *Supponiamo che la riga i-esima della matrice* A *sia del tipo*

$$a_{i1} = hb_{i1} + kc_{i1} \quad a_{i2} = hb_{i2} + kc_{i2} \quad \cdots \quad a_{in} = hb_{in} + kc_{in}$$

con $h, k \in \mathbf{K}$. *Indicate con* B *e* C *la matrici coincidenti con* A *ad eccezione della riga i-esima riga costituita, rispettivamente, gli elementi* $b_{i1}\ \ b_{i2}\ \ \ldots\ \ b_{in}$ *e* $c_{i1}\ \ c_{i2}\ \ \ldots\ \ c_{in}$, *allora* $\det A = h \det B + k \det C$.
e) *Se* B *è la matrice che si ottiene da* A *scambiando due righe (risp. colonne), allora* $\det B = -\det A$.
f) *Se* A *ha due righe (risp. colonne) uguali, allora* $\det A = 0$. *In generale, se gli elementi di una riga (risp. colonna) sono proporzionali a quelli di un'altra riga (risp. colonna), il determinante è zero.*
g) *La somma, col segno opportuno, dei prodotti degli elementi di una riga (risp. colonna) per i determinanti dei complementi algebrici degli elementi analoghi di un'altra riga (risp. colonna) è zero.*

Dimostrazione. a) Poniamo $A^t = (a'_{ij})$, con $a'_{ij} = a_{ji}$. Allora,

$$\det A^t = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} a'_{1\sigma(1)} a'_{2\sigma(2)} \cdots a'_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

Ma la seconda sommatoria coinvolge i prodotti degli elementi di A, presi in righe e colonne differenti, ordinati secondo l'indice di colonna da cui la conclusione.

b) Ovvia per il Teorema di Laplace.

c) Segue dal Teorema di Laplace sviluppando il determinante di B secondo la riga moltiplicata per lo scalare k. Il caso generale segue per induzione su n. Oppure, basti osservare che ogni addendo nella definizione del determinante contiene il fattore k^n.

d) Sempre per il Teorema di Laplace, sviluppiamo il determinante della matrice A secondo la i-esima riga. Allora, ciascun addendo della formula contiene un fattore del tipo $k_1 b_{ij} + k_2 c_{ij}$, con $j = 1, 2, \ldots, n$. Quindi, per la proprietà distributiva di $\mathbf{K}$ e per la c), si ha la conclusione.

e) Si può procedere per induzione sull'ordine n della matrice. Se $n = 2$, il risultato è ovvio. Supponiamo, per ipotesi induttiva, che valga per le matrici di ordine $n - 1$. Sviluppiamo il determinante delle matrici A e B secondo una riga (risp. colonna) diversa da quelle scambiate fra loro, e sia la i-esima. Allora,

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

$$\det B = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det B_{ij}$$

Poiché le matrici A_{ij} e B_{ij} hanno ordine $n-1$ e due righe (risp. colonne) scambiate tra loro, per ipotesi induttiva $\det B_{ij} = -\det A_{ij}$ e, quindi, la conclusione.

f) Segue dalla e) in quando, scambiando le due righe (risp. colonne) uguali, si riottiene la matrice A; e, poiché $\det A = -\det A$, si ha che $\det A = 0$. La seconda parte segue dalla c).

g) Si osservi che una somma del tipo

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{ik} \det A_{jk} \qquad (i \neq j)$$

è il determinante della matrice B che si ottiene da A sostituendo, al posto della riga j-esima, gli elementi della riga i-esima. Quindi, B ha due righe uguali per cui $\det B = 0$.

Un altro risultato di notevole importanza, ma che non dimostreremo, è il

Teorema 2. (di Binet) *Siano A e B due matrici quadrate di ordine n. Allora,*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Una formula analoga relativa alla somma di due matrici quadrate dello stesso ordine è, in generale, falsa. Ossia, il determinante della somma di due matrici quadrate di ordine n non è uguale alla somma dei determinanti delle matrici. Ad esempio, siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Allora, $\det A = 1$, $\det B = 2$, mentre $\det (A+B) = 6$. Quindi, $\det (A+B) \neq \det A + \det B$.

Il Teorema di Binet ha notevoli applicazioni; e, a tale proposito, consideriamo una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{K})$. Diremo che A è *invertibile* o *non singolare* se esiste una matrice $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{K})$, detta *inversa* di A, in simboli A^{-1}, tale che $AB = BA = I$, ove I è la matrice *unità*, ovvero l'elemento neutro rispetto al prodotto righe per colonne di $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{K})$. Se la matrice B esiste, è unica. Infatti, se C è una matrice tale che $AC = CA = I$, allora

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ è invertibile, affinché una matrice $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ sia l'inversa di A è sufficiente che una sola delle condizioni $AB = I$, $BA = I$ sia verificata. Infatti, se $AB = I$, si ha anche

$$BA = (A^{-1}A)BA = A^{-1}(AB)A = A^{-1}IA = A^{-1}A = I$$

Allo stesso modo si dimostra che $BA = I$ implica $AB = I$. Per il Teorema di Binet, risulta

$$\det(AB) = \det A \, \det B = \det I = 1 \Longrightarrow \det A \neq 0 \text{ e } \det B = \frac{1}{\det A}$$

Quindi, una matrice invertibile ha determinante non nullo. Ne segue, tra l'altro, che il prodotto di due matrici invertibile è invertibile. Ma vale anche il viceversa:

Teorema 3. *Sia* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{K})$ *una matrice tale che* $\det A \neq 0$. *Allora, A è invertibile e, posto* $A^{-1} = (b_{ij})$, *si ha*

1) $$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A}$$

ove A_{ji} è il complemento algebrico dell'elemento a_{ji} di A.

Dimostrazione. Indichiamo con $\mathcal{A}$ la matrice dei determinanti dei complementi algebrici di $A = (a_{ij})$; ossia, $\mathcal{A} = ((-1)^{i+j} \det A_{ij})$. Allora, la 1) è equivalente alla

2) $$\sum_{h=1}^{n} (-1)^{i+h} a_{ih} \det A_{jh} = \delta_{ij} \det A$$

Infatti, il primo membro della 2) è l'elemento di posto ij della matrice $A{}^t\!A$; e, se $i = j$, risulta lo sviluppo di $\det A$ secondo la regola di Laplace rispetto alla i-esima riga. Se $i \neq j$, la 2) diviene

$$3) \qquad \sum_{h=1}^{n} (-1)^{i+h} a_{ih} \det A_{jh} = 0$$

Ora, la 3) è la somma col segno opportuno dei prodotti degli elementi delle i-esima riga per i complementi algebrici della j-esima riga; quindi, per la g) della Proposizione 1, è vera. Per quanto riguarda l'equivalenza della 1) con la 2), si ha

$$A^{-1}A = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hj} = \delta_{ij}$$

e, tenendo conto della 2), risulta

$$4) \qquad \sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hj} = \delta_{ij} = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{i+h} a_{ih} \frac{\det A_{jh}}{\det A}$$

Consideriamo la matrice

$$\mathcal{D} = (d_{ij}) = \frac{\mathcal{A}}{\det A} = \left((-1)^{i+j} \frac{\det A_{ij}}{\det A} \right)$$

Allora, il terzo membro della 4) non è altro che $A^t\mathcal{D}$. Quindi, $AA^{-1} = A^t\mathcal{D} = I$, e ciò implica che $A^{-1} = {}^t\mathcal{D}$, da cui la conclusione.

Ora, possiamo completare la serie delle proprietà e definizioni delle matrici quadrate

iv) Se A è una matrice invertibile, ${}^t(A^{-1}) = ({}^t\!A)^{-1}$.

v) Una matrice A si dice *ortogonale* se ${}^t\!A = A^{-1}$. Allora, $\det(A\,{}^t\!A) = (\det A)^2 = \det I = 1$, e ciò implica che $\det A = \pm 1$. Dal momento che $A\,{}^t\!A = {}^t\!AA = I$, sviluppando il prodotto righe per colonne di $A\,{}^t\!A$, è immediato verificare che le *somme dei quadrati* di ogni riga di A è uguale 1, mentre il *prodotto* degli elementi corrispondenti di due righe distinte è uguale 0. Invece, sviluppando il prodotto righe per colonne di ${}^t\!AA$ si ottiene lo stesso risultato per le colonne di A.

Se $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, abbiamo

vi) Se $A = (z_{ij})$, la matrice $B = (\bar{z}_{ij})$ si dice *coniugata* di A, in simboli $\bar{A}$. Chiaramente, $\det \bar{A} = \overline{\det A}$.

vii) Una matrice $A = (z_{ij})$ si dice *unitaria* se, posto $^*A = {}^t\bar{A} = (\bar{z}_{ji})$, si ha $^*A = A^{-1}$. Poiché $\det {}^*A = \overline{\det A}$ per la v) e la vi), risulta $\overline{\det A} \det A = 1$. Ciò implica che $\left|\det A\right| = 1$.

vii) Una matrice $A = (z_{ij})$ si dice *hermitiana* se $A = {}^*A = {}^t\bar{A}$. Ne segue che $z_{ii} \in \mathbf{R}$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ritorniamo ora nel contesto più ampio delle matrici $m \times n$. Dicesi *minore di ordine* k di una matrice *non nulla* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$ il *determinante* di una matrice quadrata di ordine k estraibile da A, ossia ottenuta prendendo gli elementi che appartengono a k righe e a k colonne distinte. Va da sé che $1 \le k \le \min\{m, n\}$. Ad esempio, dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

si possono estrarre al massimo matrici quadrate di ordine 3. Se $k = 2$, scegliamo la prima e la terza riga, la seconda e la terza colonna. Allora, la matrice 2×2 è

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è -6; quindi, il minore è non nullo. Diremo che un matrice A ha *rango* (o *caratteristica*) r, in simboli $\operatorname{rg} A = r$, se è possibile estrarre un minore *non nullo* di ordine r, mentre *tutti* i minori di ordine *maggiore* di r sono nulli. Si osservi che, per una matrice quadrata A, $\det A \neq 0$ se, e soltanto se, $\operatorname{rg} A = n$. Infatti, A stessa è una matrice quadrata estraibile da A. Pertanto, se $\det A \neq 0$, $\operatorname{rg} A = n$; viceversa, se $\operatorname{rg} A = n$, esiste un minore non nullo di ordine n e questi è la matrice A. Rispetto al prodotto di matrici abbiamo il seguente risultato: se $A \in \mathcal{M}_{m\times p}$ e $B \in \mathcal{M}_{p\times n}$,

$$\operatorname{rg}(AB) \le \min\left\{\operatorname{rg}(A), \operatorname{rg}(B)\right\}$$

3. Sistemi lineari

Per lo studio dei sistemi di equazioni lineari ci limiteremo al caso in cui $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Si tratta di determinare le soluzioni di un sistema di m equazioni lineari in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ove $a_{ij} \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $b_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. I numeri reali a_{ij} sono detti *coefficienti* delle equazioni, i numeri reali b_i *termini noti.* Iniziamo col considerare il caso in cui $n = m = 2$. Avremo allora il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Possiamo ovviamente supporre che almeno uno dei due coefficienti delle equazioni sia non nullo; e, per quanto riguarda la prima, sia a_{11}. Così, esplicitando l'incognita x_1, abbiamo

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}}$$

Sostituendola nella seconda equazione otteniamo

$$a_{21}\frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}} + a_{22}x_2 = b_2$$

da cui

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

Se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, si avrà

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Sostituendo il valore numerico di x_2 nella prima equazione si ricava il valore di x_1:

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

È facile verificare che, nell'ipotesi cui sopra, la soluzione del sistema che abbiamo trovato è unica. Infatti, supponiamo anzitutto che $b_1 = b_2 = 0$, per cui il sistema ammette la soluzione $(0, 0)$. Quindi, se (x_1', x_2') è un'altra soluzione, risulterà

$$\begin{cases} a_{11}x_1' + a_{12}x_2' = 0 \\ a_{21}x_1' + a_{22}x_2' = 0 \end{cases}$$

Moltiplichiamo la prima equazione per a_{22} e la seconda per a_{11}. Sottraendo poi la seconda equazione dalla prima, otteniamo $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_1' = 0$. Quindi, per l'ipotesi fatta, risulta $x_1' = 0$. In modo analogo si ricava che $x_2' = 0$. Passiamo al caso in cui $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$ e supponiamo che esistano due soluzioni del sistema: (x_1', x_2') e (x_1'', x_2''). Allora,

$$\begin{cases} a_{11}x_1' + a_{12}x_2' = b_1 \\ a_{21}x_1' + a_{22}x_2' = b_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1'' + a_{12}x_2'' = b_1 \\ a_{21}x_1'' + a_{22}x_2'' = b_2 \end{cases}$$

Ne segue che $(x_1' - x_1'', x_2' - x_2'')$ è l'unica soluzione del sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

Pertanto, $x_1' = x_1''$ e $x_2' = x_2''$. Ciò che abbiamo dimostrato non è altro che il *Teorema di Cramer* per un sistema lineare di due equazioni in due incognite avendo utilizzato il metodo di sostituzione. Ma, ritornando alla soluzione trovata, c'è da notare che il denominatore e i due numeratori sono delle quantità già note. Infatti, se indichiamo con A la matrice (detta *incompleta*) dei coefficienti delle due incognite,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

l'ipotesi da cui siamo partiti si esprime dicendo che $\det A \neq 0$; o, in altri termini, A è una matrice invertibile. Per quanto riguarda i numeratori, consideriamo le due matrici

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

Allora, $\det B_1$ è il numeratore della soluzione x_1, $\det B_2$ quello della soluzione x_2. Pertanto, la soluzione unica (x_1, x_2) del sistema è data dalle formule

$$x_1 = \frac{\det B_1}{\det A} \qquad x_2 = \frac{\det B_2}{\det A}$$

Le conclusioni a cui siamo giunti mettono in luce quale sia stata l'origine della nozione di determinante di una matrice quadrata: le risoluzione dei sistemi di equazioni lineari. Ciò apparirebbe in modo ancora più evidente se analizzassimo il sistema di tre equazioni in tre incognite, ma è superfluo dal momento che è più semplice occuparci del caso generale. Quindi, consideriamo il sistema di n equazioni lineari in n incognite

$$1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Indichiamo con A, B ed X le matrici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Sia inoltre B_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, la matrice quadrata che si ottiene dalla matrice A sostituendo la i-esima colonna con la colonna dei termini noti:

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \ldots \quad B_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{pmatrix}$$

Teorema 4. (di Cramer) *Se* $\det A \neq 0$, *il sistema lineare* 1) *ammette un'unica soluzione data dalle formule*

$$x_1 = \frac{\det B_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det B_2}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{\det B_1}{\det A}$$

Dimostrazione. È possibile procedere sviluppando direttamente i calcoli, oppure utilizzare il simbolismo matriciale. In questo modo la dimostrazione è più breve. In primo luogo osserviamo che il sistema lineare 1) si può scrivere nella forma

$$AX = B$$

Supponiamo che il sistema ammetta una soluzione $\bar{X}$. Poiché, per ipotesi, $\det A \neq 0$, esiste la matrice inversa A^{-1} di A. Allora, moltiplicando (a sinistra) ambo i membri della relazione precedente, otteniamo

$$\begin{aligned} A^{-1}(A\bar{X}) &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A)\bar{X} &= A^{-1}B \\ IX &= A^{-1}B \\ \bar{X} &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Ciò implica che la soluzione, dovendo necessariamente coincidere con la matrice colonna $A^{-1}B$, non può che essere unica. Dimostriamo ora che $\bar{X} = A^{-1}B$ è una soluzione. Al riguardo,

$$A\bar{X} = B \Longrightarrow A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = IB = B$$

Per concludere, resta solo da esplicitare l'identità matriciale $\bar{X} = A^{-1}B$. Sappiamo che gli elementi della matrice A^{-1} sono

$$(-1)^{i+j}\frac{\det A_{ji}}{\det A}$$

In altri termini, gli elementi di C che giacciono *sotto* la diagonale principale sono tutti nulli. Sviluppando il determinante secondo la prima colonna, si ottiene

$$\det C = c_{11}c_{22}\cdots c_{nn}$$

Quindi, se C è invertibile, $\det C \neq 0$ per cui $c_{ii} \neq 0$, per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$.

Applichiamo quanto sopra al caso dei sistemi lineari di n equazioni in n incognite. Se A è la matrice incompleta di un sistema lineare, con A invertibile, è possibile trasformare quest'ultimo in un altro sistema lineare in modo tale che la nuova matrice incompleta C sia triangolare, invertibile e i due sistemi lineari abbiano la stessa soluzione. Ne segue che il nuovo sistema sarà del tipo

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n-1}x_{n-1} + c_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad\quad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n-1}x_{n-1} + c_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad c_{n-1n-1}x_{n-1} + c_{n-1n}x_n = b'_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = b'_n \end{cases}$$

La determinazione della soluzione è ora molto facile. Dall'ultima equazione si ricava che $x_n = b'_n/c_{nn}$. Sostituendola nella penultima si ottiene x_{n-1}, e così via.

La trasformazione del sistema lineare iniziale avviene per mezzo di *operazioni elementari sulle equazioni del sistema* del tipo seguente:

I) scambiare tra loro due equazioni del sistema;

II) moltiplicare primo e secondo membro di un'equazione per uno scalare non nullo;

III) sostituire un'equazione del sistema con quella che si ottiene sommando ad essa un multiplo di un'altra equazione.

cosicché il nuovo sistema, si verifica facilmente, ammette la stessa soluzione di quello iniziale.

Consideriamo allora il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y + z = 2 \end{cases}$$

Primo passo: eliminare i coefficiente della x nella seconda e terza equazione.

Quindi,

$$\bar{X} = A^{-1}B$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\det A_{11}b_1 + (-1)^{1+2}\det A_{21}b_2 + \ldots + (-1)^{1+n}\det A_{n1}b_n \\ (-1)^{2+1}\det A_{12}b_1 + (-1)^{2+2}\det A_{22}b_2 + \ldots + (-1)^{2+n}\det A_{n2}b_n \\ \vdots \\ (-1)^{n+1}\det A_{1n}b_1 + (-1)^{n+2}\det A_{2n}b_2 + \ldots + (-1)^{n+n}\det A_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det B_1 \\ \det B_2 \\ \vdots \\ \det B_n \end{pmatrix}$$

L'ultima uguaglianza deriva dal fatto che gli elementi della precedente matrice colonna non sono altro che $\det B_i$ sviluppato secondo la i-esima colonna, per $i = 1, 2, \ldots, n$.

Il Teorema di Cramer è fondamentale dal punto di vista teorico perché stabilisce una condizione *sufficiente* ($\det A \neq 0$) per la risoluzione di un sitema lineare di n equazioni in n incognite. D'altro canto, si rivela poco efficace qualora si tratti di trovare la soluzione di un sistema lineare con coefficienti assegnati se n è sufficientemente grande dato l'elevato numero di operazioni (addizioni e moltiplicazioni) necessarie per calcolare i determinanti. Un approccio diverso è rappresentato dal *metodo di eliminazione di Gauss.* Non esporremo l'apparato teorico necessario per la sua completa dimostrazione; però, lo illustreremo attraverso alcuni esempi. In ogni caso, siamo in grado di presentare l'idea di fondo che è alla base del metodo.

Una matrice $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{K})$ si dice *triangolare (superiore)* se è del tipo

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \ldots & \ldots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \ldots & \ldots & c_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \ldots & \ldots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_{n-1n-1} & c_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

1^a eq $= 1^a$ eq
2^a eq $\rightarrow 2^a$ eq $- 1^a$ eq
3^a eq $\rightarrow 2(1^a$ eq$) - 3^a$ eq
Così, otteniamo

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 2z = 2 \\ 5y - 3z = 0 \end{cases}$$

Secondo passo: eliminare il coefficiente della y nella terza equazione del nuovo sistema lineare.
1^a eq $= 1^a$ eq
2^a eq $= 2^a$ eq
3^a eq $\rightarrow 5(2^a$ eq$) - 3^a$ eq
In conclusione, avremo

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 2z = 2 \\ 13z = 10 \end{cases}$$

Come già indicato, la soluzione del sistema si ottiene immediatamente ed è

$$(x = 17/13, y = 6/13, z = 10/13)$$

Consideriamo ora il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 3x + 4y - z - 3t = 2 \\ x + y - z - 2t = 0 \\ x - y + z + 4t = 2 \\ x - y - z + t = 2 \end{cases}$$

Dal momento che abbiamo un sistema lineare di quattro equazioni in quattro incognite, i passi da compiere saranno tre.
Primo passo: eliminare i coefficienti della x nella seconda, terza e quarta equazione.
1^a eq $= 1^a$ eq
2^a eq $\rightarrow 1^a$ eq $- 3(2^a$ eq$)$
3^a eq $\rightarrow 3^a$ eq $- 2^a$ eq
4^a eq $\rightarrow 4^a$ eq $- 3^a$ eq

Si ottiene allora il sistema

$$\begin{cases} 3x + 4y - z - 3t = 2 \\ y + 2z + 3t = 2 \\ -2y + 2z + 6t = 2 \\ -2z - 3t = 0 \end{cases}$$

Secondo passo: eliminare il coefficiente della y nella terza equazione.

1^{a} eq $= 1^{a}$ eq

2^{a} eq $= 2^{a}$ eq

3^{a} eq $\rightarrow 2(2^{a}$ eq$) + 3^{a}$ eq

4^{a} eq $= 4^{a}$ eq

Si avrà

$$\begin{cases} 3x + 4y - z - 3t = 2 \\ y + 2z + 3t = 2 \\ 6z + 12t = 6 \\ -2z - 3t = 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x + 4y - z - 3t = 2 \\ y + 2z + 3t = 2 \\ z + 2t = 1 \\ -2z - 3t = 0 \end{cases}$$

Terzo passo: eliminare il coefficiente della z nella quarta equazione.

1^{a} eq $= 1^{a}$ eq

2^{a} eq $= 2^{a}$ eq

3^{a} eq $= 3^{a}$ eq

4^{a} eq $\rightarrow 2(3^{a}$ eq$) + 4^{a}$ eq

In conclusione, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 3x + 4y - z - 3t = 2 \\ y + 2z + 3t = 2 \\ z + 2t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

la cui soluzione è $(x = -1, y = 2, z = -3, t = 2)$.

Il problema che intendiamo affrontare ora è il seguente: dato un sistema lineare di n equazioni in n incognite, cosa si può dire, per quanto riguarda la sua risolubilità, se il determinante della matrice incompleta A è uguale a zero? Al riguardo, consideriamo il sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

e indichiamo con C la matrice $m \times (n+1)$, detta *completa*, costituita dai coefficienti delle incognite e dai termini noti:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Il risultato fondamentale sulla risolubilità di tale sistema è rappresentato dal

Teorema 5. (di Rouché–Capelli) *Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammetta soluzione è che il rango della matrice incompleta A sia uguale al rango della matrice completa C, ossia* $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} C$.

Omettiamo la dimostrazione in quanto va al di là dei nostri scopi. Osserviamo solo che i ranghi delle matrici completa e incompleta sono legati dalla relazione $\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg} C$ poiché A è una matrice estraibile da C per cui, se $\operatorname{rg} A = r$, $\operatorname{rg} C$ non può che essere $\geq r$.

Torniamo allora al sistema lineare di n equazioni in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

e supponiamo che $\det A = 0$, per cui $\operatorname{rg} A \leq n-1$ (si veda p. 24). Se $\operatorname{rg} A < \operatorname{rg} C$, per il Teorema di Rouché–Capelli, non esiste alcuna soluzione. Se $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} C$, esisterà almeno una soluzione, e sia $\operatorname{rg} A = r \leq n-1$. Possiamo inoltre supporre, eventualmente riordinando sia le equazioni sia le incognite, che un minore non nullo di ordine r di A sia costituito dagli elementi delle prime r righe e delle prime r colonne. Ciò implica che solo le prime r equazioni sono sufficienti per determinare la soluzione, o le soluzioni, del sistema in quanto le rimanenti $n-r$ equazioni si ottengono come combinazione lineare delle prime r righe (proprietà che non dimostreremo); e, di conseguenza, non apportano alcun contributo per la determinazione delle soluzioni. Così, ci siamo ricondotti ad un sistema lineare di r equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

Ora, poniamo $x_{r+1} = t_{r+1}, x_{r+2} = t_{r+2}, \ldots, x_n = t_n$, e portiamo a secondo membro gli addendi delle r equazioni che contengono le incognite indicate:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}t_{r+1} - \ldots - a_{1n}t_n + b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2r+1}t_{r+1} - \ldots - a_{2n}t_n + b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}t_{r+1} - \ldots - a_{rn}t_n + b_r \end{cases}$$

Si tratta di un sistema lineare di r equazioni in r incognite i cui termini noti non sono più numerici ma contengono $n-r$ parametri. Comunque, per ogni valore assegnato ai parametri t_i, $i = r+1, r+2, \ldots, n$, esiste un'unica soluzione in forza del Teorema di Cramer. Così, in totale, si avranno infinite soluzioni. Precisamente, ∞^{n-r} soluzioni, dove l'esponente esprime il fatto che queste dipendono da $n-r$ parametri. Possiamo allora riassumere lo studio di un sistema lineare di n equazioni in n incognite nel seguente schema:

$$\begin{cases} \det A \neq 0 \quad \text{una sola soluzione per il Teorema di Cramer} \\ \det A = 0 \quad \begin{cases} \operatorname{rg} A < \operatorname{rg} C \quad \text{nessuna soluzione per il Teorema di Rouché – Capelli} \\ \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} C = r \quad \infty^{n-r} \text{ soluzioni} \end{cases} \end{cases}$$

Le considerazioni svolte finora permettono di classificare anche le soluzioni di un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Infatti, se $\operatorname{rg} A < \operatorname{rg} C$ non esiste alcuna soluzione per il Teorema di Rouché–Capelli. Se $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} C = r \leq \min\{n, m\}$, supponiamo come in precedenza che un minore non nullo sia costituito dagli elementi delle prime r righe e delle prime r colonne, e distinguiamo due casi: $n < m$ ed $n > m$. Nel primo caso, $r \leq n$ e le ultime $m-r$ equazioni sono ininfluenti come già visto. Ora, se $r = n$, esiste un'unica soluzione per il Teorema di Cramer. Se $r < n$, esistono ∞^{n-r} soluzioni. Nel secondo caso, $r \leq m$. Se $r < m$, le ultime $m-r$ equazioni sono trascurabili per cui esistono ∞^{n-r} soluzioni. Se $r = m$ tutte le equazioni sono essenziali, ma le soluzioni